情報幾何ゼミ Torsion に関する補足 (豊中版)

大阪大学大学院基礎工学研究科
Tanaka Fuyuhiko

La vérité est unique !!
Mais, c'est après mensuration.

F. Tanaka

1 問題編

古典情報幾何輪読でも疑問があったので, まず, 定義を含めて捩率 (Torsion) テンソルについて確認したい. ここでは Amari [1] の Lecture Note に基いて説明しておく. ただし, 記法は合わせていない.

捩率テンソル場 (Torsion tensor field) は任意の二つのベクトル場 $A, B \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$ 上で以下のように定義される.

$$T(A, B) := \nabla_A B - \nabla_B A - [A, B]$$

二つのベクトル場を入力して, 新しいベクトル場を返すので $(2, 1)$ テンソル場などとも言う. 捩率テンソルは, 各点で成分表記したもので与えられるが, ベクトル場とベクトルという言葉遣いと同様に以下では混同して用いる. (実際, テンソル場を与えると各点に制限して, テンソルが決まるし, 各点でテンソルを与えると全体としてテンソル場を与えることができる.)

証言 1
Intuitively speaking, $\epsilon^2 T(A, B)$ represents the change in the position of the origin of $\mathcal{T}_\theta(\mathcal{M})$ after shifting $\mathcal{T}_\theta(\mathcal{M})$ in parallel along the parallelogram composed of two infinitesimal vectors ϵA and ϵB, where ϵ is a small quantity.
(直感的には, $\epsilon^2 T(A, B)$ は $\mathcal{T}_\theta(\mathcal{M})$ を無限小のベクトル ϵA,ϵB が張る平行四辺形に沿って一周, 平行移動したものと $\mathcal{T}_\theta(\mathcal{M})$ の原点の変化を表している.)

座標系 $\{\theta^i\}$ を与えると,Torsion の各成分は以下のようなテンソルになる. (注意 : テンソルになることは, 実際に, 座標変換の式を書き下して確認するが, それは省略.)

$$T_{ijk}(\theta) = \langle T(\partial_i, \partial_j), \partial_k \rangle$$

したがって, 座標基底ベクトル $\partial_i := \frac{\partial}{\partial \theta^i}$ を用いると

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) := \nabla_i(\partial_j) := \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

$[\partial_i, \partial_j] = 0$ に注意して,

$$\begin{aligned} T_{ijk}(\theta) = \left\langle \Gamma_{ij}^l \partial_l, \partial_k \right\rangle - \left\langle \Gamma_{ji}^l \partial_l, \partial_k \right\rangle &= \Gamma_{ij}^l \langle \partial_l, \partial_k \rangle - \Gamma_{ji}^l \langle \partial_l, \partial_k \rangle \\ &= \Gamma_{ij}^l g_{lk} - \Gamma_{ji}^l g_{lk} \\ &= \Gamma_{ijk} - \Gamma_{jik} \end{aligned}$$

とかける.

(注意: Torsion テンソルはリーマン計量が与えられていない時にも定義される. その場合には, $T(\partial_i, \partial_j) = T_{ij}^k \partial_k$ と座標基底ベクトルで成分を展開すればよい. その時に $T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$ とするのがよく微分幾何の教科書でみる表記. なお, 通常は上のように T を用いるが, Amari では, おそらく T_{ijk} を別に使うので, S にしたと推測される.)

特に，T_{ij}^k はテンソルなので，ある座標系ですべての成分が 0 ならば恒等的に $T = 0$ が示される．つまり，$T = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ である．なお，古典情報幾何の場合には α 接続の定義から自動的に $T = 0$ が成立するが，量子情報幾何の場合には一般には成立しない．

次にリーマン-クリストッフェル曲率 (Riemann-Christoffel curvature) R について説明する．R は三つのベクトル場を受けて一つのベクトル場を返す写像．$A, B, C \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$ に対して以下のように定義．

$$R(A,B)C := \nabla_A \nabla_B C - \nabla_B \nabla_A C - \nabla_{[A,B]} C.$$

証言 2
Intuitively speaking, $\epsilon^2 R(A,B,C)$ represents the change in vector C, when C is shifted in parallel along the palallelogram composed of two infinitesimally small vectors ϵA and ϵB in $\mathcal{M}$.
(直観的には，$\epsilon^2 R(A,B,C)$ は $\mathcal{M}$ において無限小のベクトル ϵA,ϵB が張る平行四辺形に沿ってベクトル C を一周平行移動したときの (元のベクトル C との) 変化を表している.）

リーマン-クリストッフェル曲率テンソルも同様に局所座標系で書き下すことができる．

$$\begin{aligned} R(\partial_k, \partial_l)(\partial_j) &= (\partial_k \Gamma_{lj}^m)\partial_m + \Gamma_{lj}^m \Gamma_{km}^n \partial_n - (k \leftrightarrow l) \\ &= R^i{}_{jkl} \partial_i \end{aligned}$$

以下，曲率テンソルの詳しい説明は省略．

問題
さて，上記二つの証言は正しいことを述べているはずであり，実際，物理など応用数学の立場から書かれた微分幾何の教科書の場合には似たような証言を見かける．しかし，「直観的」とあるようにあいまいな点が多い．数学的に厳密に書かれた微分幾何の教科書も幾つか調べてみたが，微分形式などを利用して曲率形式と捩率形式を定めるなど高度な立場から書き下していることも多い反面，本来の幾何学的な意味合いについては述べられていない．（もちろん探せば見つかるかもしれないが.）問題点は次のようである．

厳密に述べるならば，上の二つのテンソルはどんな量をあらわしているのか？

情報幾何に興味をもって勉強し始めた人たちが，こういった点でつまづいてしまうのを避けるため，詳しく解説しておく．証言 1,2 の意味するところを数学的に厳密に説明し，あいまいな部分（たとえば「平行四辺形」）を明確にする．

2　解決編

詳しく解説している本を見つけられなかったので以下は自分なりの解釈に基づいた計算である．より平易な方法もあるかもしれない．

2.1　平行四辺形

まず，上の証言にある「$\epsilon A, \epsilon B$ による平行四辺形 (parallelogram)」という叙述を正確に解釈する所から始める．確かに近似的には平行四辺形になるのだが，どういう意味の「近似」だったのかをはっきりさせることが重要である．

点 P の近傍で局所座標系 $\{\theta^j\}$ が与えられているとする．この点 P で互いに独立な接ベクトル $U(P), V(P) \in T_P(\mathcal{M})$ が与えられているとする．また, 接続も成分の形で Γ_{ij}^k が与えられているとする. これらの量は十分滑らかであるとする.(解析的である必要はない.)

まず, 点 Q, R, S, S' を次のように定める.

(i) Q: P から $U(P)$ を初期速度として測地線を延ばして ϵ だけ進んだ点 (この測地線を $c_{U(P)}$ とかく)

(ii) R: P から $V(P)$ を初期速度として測地線を延ばして ϵ だけ進んだ点 (この測地線を $c_{V(P)}$ とかく)

(iii) S: P から Q まで $c_{U(P)}$ 上で $V(P)$ を平行移動して $V(Q)$ をつくり, Q から $V(Q)$ を初期速度として測地線を延ばして ϵ だけ進んだ点（この測地線を $c_{V(Q)}$ とかく)

(iv) S': P から R まで $c_{V(P)}$ 上で $U(P)$ を平行移動して $U(R)$ をつくり, R から $U(R)$ を初期速度として測地線を延ばして ϵ だけ進んだ点（この測地線を $c_{U(R)}$ とかく)

もちろん $\epsilon > 0$ は十分小さい正の量で, 今考えている座標系の範囲をはみ出さないように取る．直観的には, $PQ \parallel RS'$, $PR \parallel QS$ である.ϵ が十分小さければ S, S' は一致するとみなせて $PQSR$ で平行四辺形をなすと考えてよい．この平行四辺形が $\epsilon U(P), \epsilon V(P)$ が点 P で張る平行四辺形である.

2.2 二つの証言の厳密な意味

さて, 以下では, Amari [1] の中にある二つの証言を数学的に厳密な形で書き直す．後の証明の利便をはかるため, 点 P における量と平行四辺形に沿って一周したときの量を比べるのではなく, $P \to Q \to S$, $P \to R \to S'$ という二つの経路に沿って移動した量を比べることにする.

証言 1 で述べられていることは, 正確には以下のようなものであると推測される.

証言 $1'$

上の経路に沿った時, 一般に点 S,S' は一致しない．しかし, その差は以下のように, Torsion T の点 P での値で評価される.

$$\theta^j(S') - \theta^j(S) = T^j(U(P), V(P))\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \tag{1}$$

したがって, ϵ が十分小さいとき, 座標系と接空間を同一視する約束で $X(S) \in \mathcal{T}_S(\mathcal{M})$, $X(S') \in \mathcal{T}_{S'}(\mathcal{M})$ の差は

$$X^j(S') - X^j(S) = \theta^j(S') - \theta^j(S) = T^j(U(P), V(P))\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

と書くこともできる.

式 (1) は以下で証明する. そして, おそらく上の内容を簡単に述べると証言 1 にあるように

「接空間 $\mathcal{T}_\theta(\mathcal{M})$ の原点が平行四辺形にそって移動するときにずれる」

という表現になったものと思われる. 一方, リーマン曲率に関する証言（証言 2）は, より厳密には以下のようなものであると推測される.

証言 $2'$

$X(P) \in \mathcal{T}_P(\mathcal{M})$ に対して, $P \to Q \to S$, $P \to R \to S'$ という二つの経路にそって得られるベクトルをそれぞれ, $X(S) \in \mathcal{T}_S(\mathcal{M})$, $X(S') \in \mathcal{T}_{S'}(\mathcal{M})$ とあらわす．このとき, 成分の差を見ると

$$X^l(S') - X^l(S) = \{-R(i,j,k)^l(P) + \Gamma_{pk}^l(P)T_{ij}^p(P)\}X(P)^k V(P)^i U(P)^j \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \tag{2}$$

のようにリーマン曲率テンソルと Torsion, 接続などを用いて各ベクトルの成分の点 P での値を用いて評価できる．ただし, $R(i,j,k) := R(\partial_i, \partial_j, \partial_k)$.

式 (2) も以下で証明する．特に Torsion が 0 の時には,

$$X^l(S') - X^l(S) = -R(i,j,k)^l(P)X^k(P)V^i(P)U^j(P)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

となり ϵ^2 の項はリーマン曲率のみになる．証言 2 はこのことを述べていたと推測される．

以上のような精密な定義を出さずに,「直観的」な平行四辺形で説明するのは微分幾何に初めて触れる初学者にとっては厳しいように思える．少なくとも 2007 年時点では, 応用向けの微分幾何のテキストで詳しい説明をしているものがなかった．

2.3 式 (1) の証明

まず, Torsion に関する式 (1) を証明する．測地線の方程式に従って丁寧に評価すればよい．ここでは泥臭いがもっとも単純な方法で行う．測地線のパラメータは t と書く.$\Delta t = \epsilon$ に取ることとして,

$$\theta^j(Q) - \theta^j(P) = \left.\frac{\mathrm{d}\theta^j}{\mathrm{d}t}\right|_P \Delta t + \left.\frac{\mathrm{d}^2\theta^j}{\mathrm{d}t^2}\right|_P \frac{(\Delta t)^2}{2!} + O(\Delta t^3).$$

ここで, 初期速度ベクトルは点 P での接ベクトル $U(P)$ で与えられていたから,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\theta^j}{\mathrm{d}t}\right|_P = U(P)^j$$

また, 測地線の方程式に従って動くので, 一般のベクトル $X = X^l\partial_l$ は平行移動の式

$$X^l_{;j} := (\nabla_j X)^l = X^l_{,j} + \Gamma^l_{jk}X^k = 0 \tag{3}$$

にしたがって動く．このことを念頭におくと

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2\theta^j}{\mathrm{d}t^2}\right|_P &= -\Gamma^j_{kl}(P)\left.\frac{\mathrm{d}\theta^k}{\mathrm{d}t}\right|_P \left.\frac{\mathrm{d}\theta^l}{\mathrm{d}t}\right|_P \\ &= -\Gamma^j_{kl}(P)U(P)^kU(P)^l\end{aligned}$$

となるので,

$$\theta^j(Q) - \theta^j(P) = U(P)^j\epsilon - \Gamma^j_{kl}(P)U(P)^kU(P)^l\frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3)$$

とかけることがわかる．

同様にして, $\theta^j(S)$ を点 P での量で評価しよう．まず, 上と同様にして, 点 Q での量で評価しておく.$V(P)$ を点 P から $c_{U(P)}$ に沿って点 Q まで平行移動したベクトル $V(Q)$

$$V(Q)^j := \{\Pi^{\nabla}_{P\to Q}(V(P))\}^j$$

を考える．ここで, $\Pi^{\nabla}_{P\to Q}(\cdot)$ は点 P から Q までの平行移動を表す写像であり, 初期条件 $X = V(P)$ により微分方程式 (3) にしたがって移動する．言い換えると, 微分方程式を解くことにより経路 $P \to Q$ 上でベクトル場が t の関数として

$$X^j(\theta) = X^j(\theta(t))$$

のように定義される.(なお, P から Q までの経路にも依存するが煩雑になるので省略してある.)

上と同様の評価ができるため

$$\theta^j(S) - \theta^j(Q) = V(Q)^j\epsilon - \Gamma^j_{kl}(Q)V(Q)^kV(Q)^l\frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3)$$

を得る．以上を用いて，$\theta^j(S)$ を ϵ^2 のオーダーまで評価すると

$$\begin{aligned}\theta^j(S) &= \theta^j(Q) + V(Q)^j\epsilon - \Gamma^j_{kl}(Q)V(Q)^kV(Q)^l\frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3)\\ &= \left\{\theta^j(P) + U(P)^j\epsilon - \Gamma^j_{kl}(P)U(P)^kU(P)^l\frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3)\right\}\\ &\quad + V(Q)^j\epsilon - \Gamma^j_{kl}(Q)V(Q)^kV(Q)^l\frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3)\end{aligned}$$

のようになる．点 Q の量を $O(\epsilon^3)$ を無視する近似で点 P の量によって書き換えよう．まず，

$$\begin{aligned}V(Q)^j\epsilon &= \left\{V(P)^j + \partial_qV(P)^j\left.\frac{\mathrm{d}\theta^q}{\mathrm{d}t}\right|_P\epsilon + O(\epsilon^2)\right\}\epsilon\\ &= \{V(P)^j - \Gamma^j_{qr}(P)V(P)^rU(P)^q\epsilon + O(\epsilon^2)\}\epsilon\\ &= V(P)^j\epsilon - \Gamma^j_{qr}(P)V(P)^rU(P)^q\epsilon^2 + O(\epsilon^3)\end{aligned}$$

である．また，接続が滑らかなので一階微分が存在して

$$\begin{aligned}\Gamma^j_{kl}(Q)V(Q)^kV(Q)^l\frac{\epsilon^2}{2} &= \left\{\Gamma^j_{kl}(P) + \partial_m\Gamma^j_{kl}(P)\epsilon + O(\epsilon^2)\right\}\left\{V(P)^k + \partial_nV(P)^k\frac{\mathrm{d}\theta^n}{\mathrm{d}t}(P)\epsilon + O(\epsilon^2)\right\}\\ &\quad\times\left\{V(P)^l + \partial_pV(P)^l\frac{\mathrm{d}\theta^p}{\mathrm{d}t}(P)\epsilon + O(\epsilon^2)\right\}\frac{\epsilon^2}{2}\\ &= \Gamma^j_{kl}(P)V(P)^kV(P)^l\frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3)\end{aligned}$$

と書き直せる．これらを代入してまとめる．すべての量が点 P で評価されるので θ 以外の (P) は省略すると

$$\begin{aligned}\theta^j(S) &= \left\{\theta^j(P) + U^j\epsilon - \Gamma^j_{kl}U^kU^l\frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3)\right\} + \{V^j\epsilon - \Gamma^j_{qr}V^rU^q\epsilon^2 + O(\epsilon^3)\}\\ &\quad - \Gamma^j_{kl}V^kV^l\frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3)\\ &= \theta^j(P) + (U^j + V^j)\epsilon + \{-\Gamma^j_{kl}U^kU^l - 2\Gamma^j_{qr}V^rU^q - \Gamma^j_{kl}V^kV^l\}\frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3)\end{aligned}$$

を得る．同様にして平行移動の順番をかえると $P \to R \to S'$ でたどると座標の値 $\theta^j(S')$ は上で単に U, V を入れ替えればよいので，

$$\theta^j(S') = \theta^j(P) + (V^j + U^j)\epsilon + \{-\Gamma^j_{kl}V^kV^l - 2\Gamma^j_{qr}U^rV^q - \Gamma^j_{kl}U^kU^l\}\frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3)$$

したがって，$\theta^j(S') - \theta^j(S)$ は以下のようになる．

$$\begin{aligned}\theta^j(S') - \theta^j(S) &= \{-\Gamma^j_{kl}V^kV^l - 2\Gamma^j_{qr}U^rV^q - \Gamma^j_{kl}U^kU^l\}\frac{\epsilon^2}{2}\\ &\quad - \{-\Gamma^j_{kl}U^kU^l - 2\Gamma^j_{qr}V^rU^q - \Gamma^j_{kl}V^kV^l\}\frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3)\\ &= (-\Gamma^j_{qr}U^rV^q + \Gamma^j_{qr}V^rU^q)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)\\ &= (\Gamma^j_{ki} - \Gamma^j_{ik})V^iU^k\epsilon^2 + O(\epsilon^3)\\ &= T^j_{ki}U^kV^i\epsilon^2 + O(\epsilon^3)\end{aligned}$$

ゆえに

$$\theta^j(S') - \theta^j(S) = T^j(U,V)\big|_P\,\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

を得る．特に $T = 0$ ならば，二つの経路 $P \to Q \to S$, $P \to R \to S'$ の開きは高々$O(\epsilon^3)$ となることに注意する．これは異なる接空間の座標基底ベクトル $(\partial_i)_{S'}$, $(\partial_i)_S$ を（たとえば平行移動や適当なベクトル場を用いた Lie 移動などで対応づけるときに）その違いが

$$(\partial_i)_{S'} = (\partial_i)_S + O(\epsilon^3)$$

を意味する．

2.4 式 (2) の証明

上と同様のアイディアで式 (2) の証明も行える．任意にベクトル $X(P) \in \mathcal{T}_P(\mathcal{M})$ が与えられているとする．上で考えた経路 $P \to Q \to S$, $P \to R \to S'$ にしたがって平行移動を行う．得られたベクトル $X(S)$,$X(S')$ は, それぞれ異なる接空間 $\mathcal{T}_S(\mathcal{M}), \mathcal{T}_{S'}(\mathcal{M})$ に属するベクトルだが, 座標系 $\{\theta^j\}$ で見たときの差は

$$\theta^j(S') - \theta^j(S) = O(\epsilon^2)$$

だから十分に小さい．このことを念頭において成分同士を比較してみることにする．再び, 2 回のステップに分けて考える．まず

- $X^j(Q) - X^j(P)$
- $X^j(S) - X^j(Q)$

を P での値で書き直す．点 P の周りで Taylor 展開を用いると

$$\begin{aligned} X^j(Q) - X^j(P) &= \partial_k X^j(P) \left.\frac{\mathrm{d}\theta^k}{\mathrm{d}t}\right|_P \epsilon + \partial_k \partial_l X^j(P) \left.\frac{\mathrm{d}\theta^k}{\mathrm{d}t}\right|_P \left.\frac{\mathrm{d}\theta^l}{\mathrm{d}t}\right|_P \frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3) \\ &= \partial_k X^j(P) U^k(P)\epsilon + \partial_k \partial_l X^j(P) U^k(P) U^l(P) \frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3) \\ &= -\Gamma^j_{kl}(P) X^l(P) U^k(P)\epsilon + \partial_k \partial_l X^j(P) U^k(P) U^l(P) \frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3) \end{aligned}$$

とかけることに注意する．同様にして, $Q \to S$ の経路では $V(Q)$ を初期速度とする測地線だったことに注意して,

$$\begin{aligned} X^j(S) - X^j(Q) &= -\Gamma^j_{kl}(Q) X^l(Q) V^k(Q)\epsilon + \partial_k \partial_l X^j(Q) V^k(Q) V^l(Q) \frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3) \\ &= -\Gamma^j_{kl}(Q) X^l(Q) V^k(Q)\epsilon + \partial_k \partial_l X^j(P) V^k(P) V^l(P) \frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3) \end{aligned}$$

を得る. 最後の式変形では, 先と同じ理由で ϵ^3 を無視すると Q をそのまま P におきかえてよいという事実を使った．点 Q の量が残っているが, とりあえず, この時点で評価すると,

$$\begin{aligned} X^j(S) - X^j(P) &= -\Gamma^j_{kl}(P) X^l(P) U^k(P)\epsilon + \partial_k \partial_l X^j(P) U^k(P) U^l(P) \frac{\epsilon^2}{2} \\ &\quad - \Gamma^j_{kl}(Q) X^l(Q) V^k(Q)\epsilon + \partial_k \partial_l X^j(P) V^k(P) V^l(P) \frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3) \end{aligned}$$

を得る. 同様に

$$\begin{aligned} X^j(S') - X^j(P) &= -\Gamma^j_{kl}(P) X^l(P) V^k(P)\epsilon + \partial_k \partial_l X^j(P) V^k(P) V^l(P) \frac{\epsilon^2}{2} \\ &\quad - \Gamma^j_{kl}(R) X^l(R) U^k(R)\epsilon + \partial_k \partial_l X^j(P) U^k(P) U^l(P) \frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3). \end{aligned}$$

したがって, この時点で点 Q,R の量を残したまま $X^j(S') - X^j(S)$ を評価すると

$$\begin{aligned} X^j(S') - X^j(S) &= (X^j(S') - X^j(P)) - (X^j(S) - X^j(P)) \\ &= -\Gamma^j_{kl}(P) X^l(P) V^k(P)\epsilon - \Gamma^j_{kl}(R) X^l(R) U^k(R)\epsilon \\ &\quad + \Gamma^j_{kl}(P) X^l(P) U^k(P)\epsilon + \Gamma^j_{kl}(Q) X^l(Q) V^k(Q)\epsilon + O(\epsilon^3). \end{aligned}$$

ここで Q,R の量を評価する.ϵ^2 の項まで残すことに注意する. 先と同じように経路 $P \to Q$ に沿った平行移動から,

$$
\begin{aligned}
\Gamma^j_{kl}(Q)V^k(Q)X^l(Q) &= \left\{\Gamma^j_{kl}(P) + \partial_m\Gamma^j_{kl}(P)\frac{\mathrm{d}\theta^m}{\mathrm{d}t}(P)\epsilon + O(\epsilon^2)\right\} \times \left\{V^k(P) + \partial_n V^k(P)\frac{\mathrm{d}\theta^n}{\mathrm{d}t}(P)\epsilon + O(\epsilon^2)\right\} \\
&\quad \times \left\{X^l(P) + \partial_p X^l(P)\frac{\mathrm{d}\theta^p}{\mathrm{d}t}(P)\epsilon + O(\epsilon^2)\right\} \\
&= \left\{\Gamma^j_{kl}(P) + \partial_m\Gamma^j_{kl}(P)U^m(P)\epsilon\right\}\left\{V^k(P) - \Gamma^k_{ni}V^i(P)U^n(P)\epsilon\right\} \times \left\{X^l(P) - \Gamma^l_{pi}X^i(P)U^p(P)\epsilon\right\} + O(\epsilon^2) \\
&= \Gamma^j_{kl}(P)V^k(P)X^l(P) + \partial_m\Gamma^j_{kl}(P)U^m(P)V^k(P)X^l(P)\epsilon \\
&\quad - \Gamma^j_{kl}(P)\Gamma^k_{ni}(P)V^i(P)U^n(P)X^l(P)\epsilon - \Gamma^l_{pi}(P)X^i(P)U^p(P)V^k(P)\Gamma^j_{kl}(P)\epsilon + O(\epsilon^2)
\end{aligned}
$$

同様にして U,V を入れ替えることにより

$$
\begin{aligned}
\Gamma^j_{kl}(R)U^k(R)X^l(R) &= \Gamma^j_{kl}(P)U^k(P)X^l(P) + \partial_m\Gamma^j_{kl}(P)V^m(P)U^k(P)X^l(P)\epsilon \\
&\quad - \Gamma^j_{kl}(P)\Gamma^k_{ni}U^i(P)V^n(P)X^l(P)\epsilon - \Gamma^k_{pi}X^i(P)V^p(P)U^k(P)\Gamma^j_{kl}(P)\epsilon + O(\epsilon^2)
\end{aligned}
$$

を得る. 以上から, すべての量が点 P の量で評価できた. 再び (P) を省略してかくと

$$
\begin{aligned}
X^j(S') - X^j(S) &= -\Gamma^j_{kl}X^lV^k\epsilon + \Gamma^j_{kl}X^lU^k\epsilon \\
&\quad - \left\{\Gamma^j_{kl}U^kX^l + \partial_m\Gamma^j_{kl}V^mU^kX^l\epsilon - \Gamma^j_{kl}\Gamma^k_{ni}U^iV^nX^l\epsilon - \Gamma^l_{pi}X^iV^pU^k\Gamma^j_{kl}\epsilon + O(\epsilon^2)\right\}\epsilon \\
&\quad + \left\{\Gamma^j_{kl}V^kX^l + \partial_m\Gamma^j_{kl}U^mV^kX^l\epsilon - \Gamma^j_{kl}\Gamma^k_{ni}V^iU^nX^l\epsilon - \Gamma^l_{pi}X^iU^pV^k\Gamma^j_{kl}\epsilon + O(\epsilon^2)\right\}\epsilon + O(\epsilon^3) \\
&= \Big\{\partial_m\Gamma^j_{kl}U^mV^kX^l - \partial_m\Gamma^j_{kl}V^mU^kX^l + \Gamma^j_{kl}\Gamma^k_{ni}U^iV^nX^l + \Gamma^l_{pi}X^iV^pU^k\Gamma^j_{kl} \\
&\quad -\Gamma^j_{kl}\Gamma^k_{ni}V^iU^nX^l - \Gamma^l_{pi}X^iU^pV^k\Gamma^j_{kl}\Big\}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \\
&= \Big\{(\partial_m\Gamma^j_{kl} - \partial_k\Gamma^j_{ml})U^mV^kX^l + (\Gamma^j_{pl}\Gamma^p_{km} - \Gamma^j_{pl}\Gamma^p_{mk})U^mV^kX^l \\
&\quad +(\Gamma^j_{kp}\Gamma^p_{ml} - \Gamma^j_{mp}\Gamma^p_{kl})U^mV^kX^l\Big\}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \\
&= \left\{\left(\partial_m\Gamma^j_{kl} - \partial_k\Gamma^j_{ml} + \Gamma^j_{kp}\Gamma^p_{ml} - \Gamma^j_{mp}\Gamma^p_{kl}\right)\Gamma^j_{pl}(\Gamma^p_{km} - \Gamma^p_{mk})\right\}U^mV^kX^l\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \\
&= \left\{R(\partial_m, \partial_k, \partial_l)^j - \Gamma^j_{pl}T^p_{km}\right\}U^mV^kX^l\epsilon^2 + O(\epsilon^3).
\end{aligned}
$$

以上より特に $T = 0$ の時には,

$$
X^j(S') - X^j(S) = R^j(U, V, X)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)
$$

が成立. 逆に, $\Gamma^j_{pl}T^p_{km} \neq 0$ の場合には, たとえ曲率 $R = 0$ であったとしても, ϵ^2 の項が残ることになる. ただし, この場合には, S', S の座標自体が ϵ^2 だけ離れていることにも注意せよ.

測地線に関する注意

測地線のみで見ると

$$
\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(s) + \Gamma^k_{ij}(a) := \Gamma^k_{ij}(s) + \frac{1}{2}T^k_{ij}, \qquad \Gamma^k_{ij}(s) := \frac{\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji}}{2}, \Gamma^k_{ij}(a) := \frac{\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}}{2}
$$

のように i, j の対称部分と歪対称部分に分解して, $\Gamma^k_{ij}(s)$ のみで決まることに注意する. 言い換えると Torsion の効果は出てこない.

Alors, c'est fini.
à la semaine prochaine!!

REFERENCES

[1] S. Amari: *Differential geometrical methods in statistics.* Springer-Verlag, 1985.